EX 9 :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$; $x\in[0,1[$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x}{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{1-x^2})}=+\infty$

f n'est pas dérivable a droite en 0

(ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0

b) f est dérivable sur]0,1[

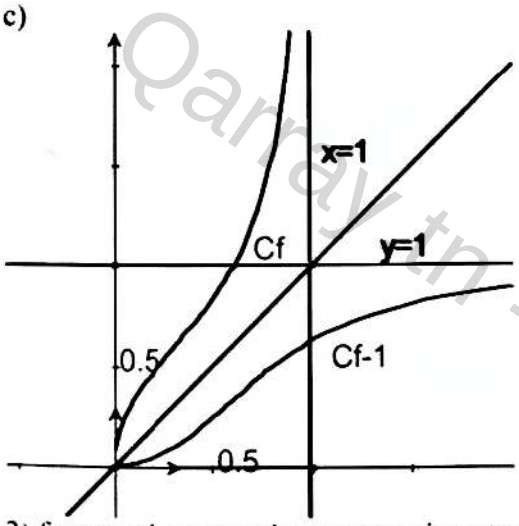
$$f'(x)=\frac{(\frac{x}{1-x^2})'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}=\frac{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2).\sqrt{1-x^2}}>0$$

x	0		1
f '(x)	|	+	
f(x)		↗	$+\infty$
	0		

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}=+\infty$

c)



2) f est continue et strictement croissante sur [0,1[elle réalise donc une bijection de [0,1[sur I=[0,+∞[

3) a) (ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0 d'où la courbe de f^{-1} admet une demi-tgte horizontal à droite au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable à droite en 0

et $(f^{-1})'_d(0)=0$

b) * $(f^{-1})'_d(0)=0$

* f est dérivable sur]0,1[

et $f'(x)=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\neq 0\ \ \forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur f(]0,1[)=]0,+∞[

* on pose y= $f^{-1}(x)$ $x\in]0,+\infty[$, $y\in]0,1[$

$$f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{\frac{y}{1-y^2}}=x\Leftrightarrow\frac{y}{1-y^2}=x^2$$

$$\Leftrightarrow y=x^2-x^2y^2\Leftrightarrow x^2y^2+y-x^2=0$$

$\Delta=1+4x^4>0y$

$y'=\dfrac{-1-\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}<0$

$y''=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$ pour $x\in]0,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{x^3}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^4}}\right]$ pour $x\in]0,+\infty[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ :y=x(voir figure)

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $x\in[-1,1[$

1) a)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
1+x	-	0	+	|	+
1-x	+	|	+	0	-
$\dfrac{1+x}{1-x}$	-	0	+	|	-

la fonction : $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur]-1,1[d'où f est dérivable sur]-1,1[

et $f'(x)=\dfrac{(\frac{1+x}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

Qarray.tn -Aqra Bled- Qarray.tn